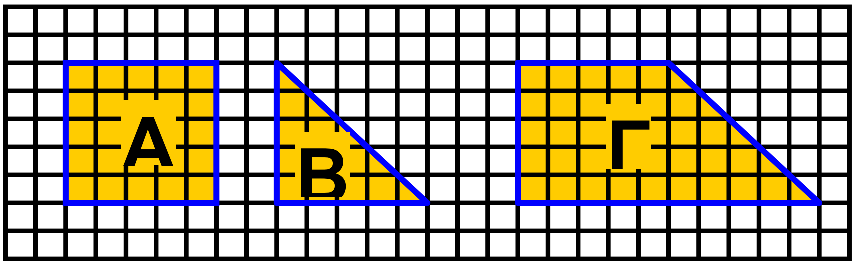
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Β'ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ 2ο «ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ»

.

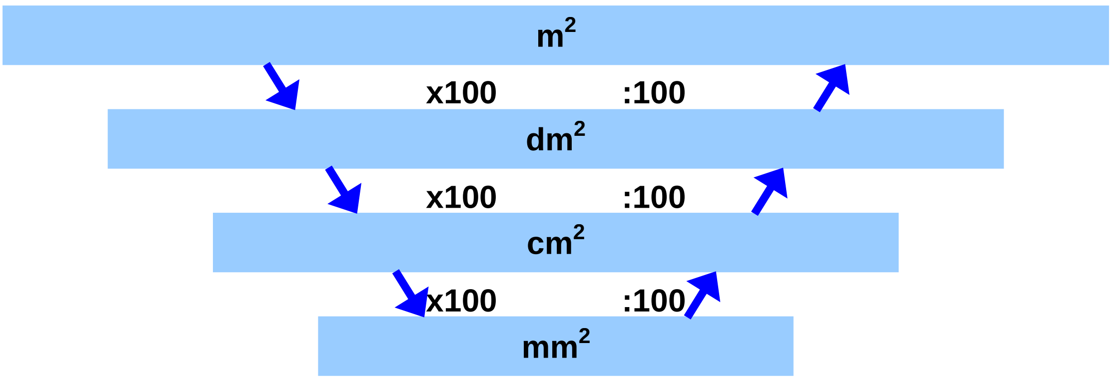
1. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των σχημάτων Α, Β, Γ χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης εμβαδών το . Τι παρατηρείτε;



Λύση:

Βρίσκουμε ότι τα εμβαδά των Α, Β, Γ είναι Α: 25, Β: 12,5, Γ: 37,5. Επομένως, παρατηρούμε ότι το εμβαδόν του Γ ισούται με το άθροι-σμα των εμβαδών Α και Β, κάτι που γίνεται φανερό αν «ενώσουμε» κατάλληλα τα σχήματα Α και Β.

2. Με τη βοήθεια του σχήματος μετατροπής μονάδων εμβαδού, να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.



m^2	dm^2	cm^2	mm^2
253			
	320		
		7122	
			12653

Λύση:
Σύμφωνα με το πιο πάνω σχήμα, για να μετατρέψουμε ένα εμβαδόν στην αμέσως μικρότερη μονάδα, πολλαπλασιάζουμε με το 100, ενώ για να το μετατρέψουμε στην αμέσως μεγαλύτερη μονάδα, διαιρούμε με το 100. Επομένως:

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
253	25300	2530000	253000000
3,20	320	32000	3200000
0,7122	71,22	7122	712200
0,012653	1,2653	126,53	12653

3. Να βάλετε σε αύξουσα σειρά τα παρακάτω εμβαδά:
α) 3,7 dm^2, 7 cm^2, 4,3 cm^2, 3,7 m^2.
β) 40 cm^2, 42 mm^2, 40 dm^2, 3 m^2.
γ) 1453 mm^2, 14,5 cm^2, 1,4 dm^2, 0,14 m^2.

Λύση:

α) Μετατρέπουμε τα τέσσερα εμβαδά στην ίδια μονάδα μέτρησης:
3,7 dm^2 = 370 cm^2,
3,7 m^2 = 37000 cm^2, οπότε:
4,3 cm^2 < 7 cm^2 < 3,7 dm^2 = 370 cm^2 < 3,7 m^2 = 37000 cm^2.

β) 42 mm^2 < 40 cm^2 = 4000 mm^2 < 40 dm^2 = 400000 mm^2 < 3 m^2 = 3000000 mm^2

γ) Αφού 14,5 cm^2 = 1450 mm^2,
1,4 dm^2 = 14000 mm^2 και 0,14 m^2 = 140000 mm^2, έχουμε ότι:
14,5 cm^2 < 1453 mm^2 < 1,4 dm^2 < 0,14 m^2.

4. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Μήκος ορθο-γωνίου	Πλάτος ορθο-γωνίου	Περίμετρος ορθο-γωνίου	Εμβαδόν ορθο-γωνίου
12 m	**10 m**		
17 m		**44 m**	
	9 m		**45 m^2**
33 m			**330 m^2**

Λύση:
Με τη βοήθεια της σχέσης: εμβαδόν ορθογωνίου = μήκος • πλάτος, συμπληρώνουμε τον πίνακα:

Μήκος ορθο-γωνίου	**Πλάτος ορθο-γωνίου**	**Περίμετρος ορθο-γωνίου**	**Εμβαδόν ορθο-γωνίου**
12 m	**10 m**	**44 m**	**120 m^2**
17 m	**5 m**	**44 m**	**85 m^2**
5 m	**9 m**	**28 m**	**45 m^2**
33 m	**10 m**	**86 m**	**330 m^2**

5. Η αίθουσα Φυσικής στο σχολείο της Άννας αποφασίστηκε να στρωθεί με τετράγωνα πλακάκια που το καθένα έχει πλευρά 25 cm.
α) Να βρείτε πόσα πλακάκια θα χρειαστούν, αν το δάπεδο της τάξης έχει διαστάσεις 12 m μήκος και 8 m πλάτος.
β) Αν κάθε πλακάκι κοστίζει 0,5 €, πόσα χρήματα θα χρειαστούν για να στρωθεί η τάξη;

Λύση: α) Το εμβαδόν του δαπέδου είναι: $E_{ΔΑΠ} = 12 \cdot 8 = 96$ (m^2) και το εμβαδόν σε κάθε πλακάκι είναι: $E_{ΠΛΑΚ} = 25 \cdot 25 = 625$ (cm^2) =
= 0,0625 (m^2).
Διαιρώντας τα δύο αυτά εμβαδά βρίσκουμε πόσα πλακάκια χρειάζονται για να στρωθεί η τάξη:

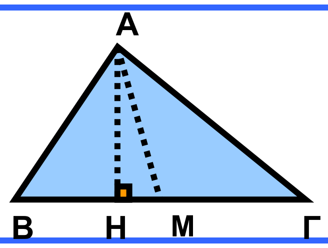
$$\frac{E_{ΔΑΠ}}{E_{ΠΛΑΚ}} = \frac{96}{0{,}0625} = 1536.$$

β) Αφού χρειάζονται 1536 πλακάκια και το κάθε πλακάκι κοστίζει 0,5 €, το συνολικό κόστος θα είναι: 1536 · 0,5 = 768 €.

6. Στο σχολείο της Κάτιας το μαθητικό συμβούλιο εκδίδει μια εφημερίδα που κάθε φύλλο της έχει διαστάσεις 42 cm μήκος και 30 cm πλάτος. Να υπολογίσετε τη συνολική επιφάνεια του χαρτιού που θα χρησιμοποιηθεί, για να τυπωθούν 800 αντίτυπα της εφημερίδας, αν κάθε αντίτυπο έχει 8 φύλλα.

Λύση:
Το εμβαδόν κάθε φύλλου είναι 30 • 42 = 1260 (cm^2). Αφού κάθε αντίτυπο έχει 8 φύλλα, χρειάζονται 8 • 1260 = 10080 (cm^2) χαρτί για κάθε αντίτυπο.
Επομένως, για να τυπωθούν 800 αντίτυπα, θα χρειαστούν: 800 • 10080 = 8064000 (cm^2) = 806,4 (m^2) χαρτί.

7. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΑΓ έχουν το ίδιο Εμβαδόν.



Λύση:

Φέρνουμε το ύψος ΑΗ. Τότε το τρίγωνο ΜΑΒ έχει εμβαδόν:

$(ΜΑΒ) = \dfrac{ΒΜ \cdot ΑΗ}{2}$.

Το τρίγωνο ΜΑΓ έχει εμβαδόν:

$(ΜΑΓ) = \dfrac{ΒΓ \cdot ΑΗ}{2}$. Όμως, ΜΒ = ΜΓ,

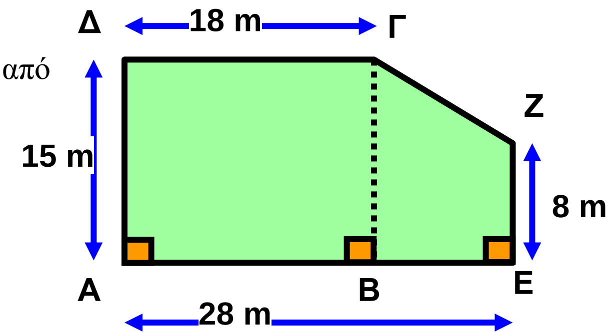
επειδή το Μ είναι το μέσο της ΒΓ (η ΑΜ είναι διάμεσος).
Άρα: (ΜΑΒ) = (ΜΑΓ).

8. Ένα οικόπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, πωλείται προς 300 € το m^2. Ποια είναι η αξία του οικοπέδου;

Λύση:

Βρίσκουμε πρώτα το εμβαδόν του οικοπέδου. Αυτό αποτελείται από το ορθογώνιο ΑΒΓΔ και το τραπέζιο ΒΕΖΓ.
Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι:
$(ΑΒΓΔ) = 18 \cdot 15 = 270\ (m^2)$.
Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι:

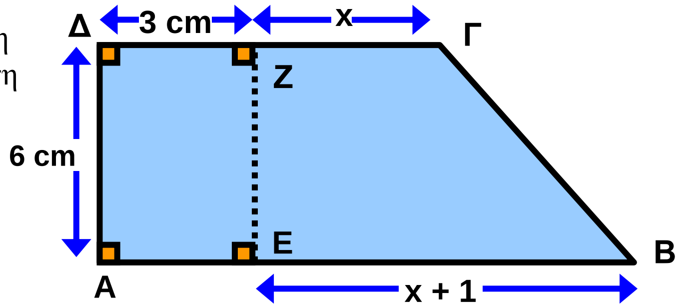
$(ΒΕΖΓ) = \dfrac{(15 + 8) \cdot 10}{2} = 115\ (m^2)$.



Άρα, το εμβαδόν του οικοπέδου είναι $270 + 115 = 385\ (m^2)$.
Για να βρούμε την αξία πώλησης του οικοπέδου, πολλαπλασιάζουμε το εμβαδόν του με την τιμή πώλησης του τετραγωνικού μέτρου. Άρα, η αξία του οικοπέδου είναι: $385 \cdot 300 = 115.500$ €.

9. Στο παρακάτω σχήμα:
α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τρα-πεζίου ΑΒΓΔ ως συνάρτηση του x.
β) Αν το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι το τριπλάσιο από το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΕΖΔ, να υπολογίσετε το x.

Λύση:



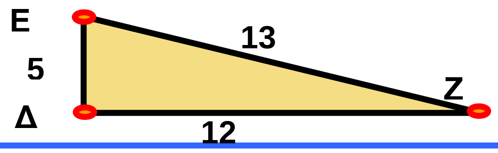
α) Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ, η μικρή βάση είναι ΔΓ = x + 3 (cm), η μεγάλη βάση είναι ΑΒ = x + 1 + 3 = x + 4 (cm) και το ύψος του είναι ΔΑ = 6 (cm). Άρα, το εμβαδόν του

είναι: $(ΑΒΓΔ) = \dfrac{(β + Β) \cdot υ}{2} =$

$= \dfrac{(x + 3 + x + 4) \cdot 6}{2} = 3(2x + 7)$ (cm^2).

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι (ΑΕΖΔ) = 3 • 6 = 18 (cm^2). Αφού το εμβαδόν του τραπεζίου είναι τριπλάσιο από το εμβαδόν του ορθογωνίου, έχουμε: (ΑΒΓΔ) = 3 • (ΑΕΖΔ) ή 3(2x + 7) = = 3 • 18
Δηλαδή: 2x + 7 = 18 ή 2x = 11 ή x = 5,5 (cm).

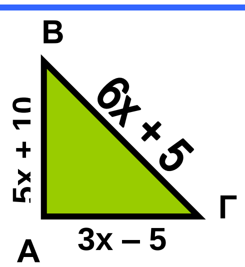
10. Να επαληθεύσετε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος.



Λύση:

Στο τρίγωνο ΔΕΖ οι κάθετες πλευρές έχουν μήκη 5 και 12, οπότε το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών είναι
$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$. Επιπλέον, η υποτείνουσα έχει μήκος 13 και το τετράγωνό της ισούται με: $13^2 = 169$. Επομένως, ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα, αφού: $5^2 + 12^2 = 13^2$.

11. Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ έχει περίμετρο 150 m.
α) Να βρείτε τον αριθμό x.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

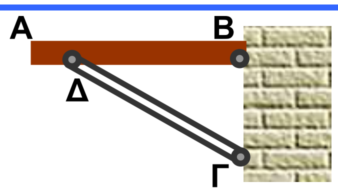


Λύση:

α) Η περίμετρος του τριγώνου είναι:
ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ = 5x + 10 + 6x + 5 + 3x – 5 = 14x + 10.
Σύμφωνα με την εκφώνηση είναι: 14x + 10 = 150 ή 14x = 150 – 10 ή 14x = 140
ή $χ = \dfrac{140}{14}$ ή x = 10.

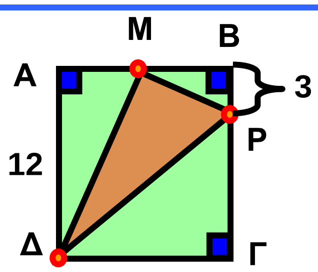
β) Για x = 10 τα μήκη των πλευρών (σε μέτρα) είναι:
ΑΒ = 5 • 10 + 10 = 60,
ΑΓ = 3 • 10 – 5 = 25,
ΒΓ = 6 • 10 + 5 = 65.
Επομένως: $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 60^2 + 25^2$ = = 3600 + 625 = 4225.
Επίσης: $ΒΓ^2 = 65^2 = 4225$.
Επομένως: $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2$ και σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

12. Ένα ράφι ΑΒ είναι στερεωμένο σε ένα Κατακόρυφο τοίχο με ένα μεταλλικό Στήριγμα μήκους ΓΔ = 32,6 cm. Αν ΒΔ = 27,7 cm και ΒΓ = 17,2 cm, να εξετάσετε αν το ράφι είναι οριζόντιο.



Λύση:
Το ράφι θα είναι οριζόντιο, μόνο αν είναι κάθετο στον τοίχο, δηλαδή αν το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο στο Β.
Είναι: $ΒΔ^2 + ΒΓ^2 = 27{,}7^2 + 17{,}2^2 =$
$= 767{,}29 + 295{,}84 = 1063{,}13$.
Επίσης: $ΓΔ^2$ = 32,62 = 1062,76.
Επομένως: $ΒΔ^2 + ΒΓ^2 \neq ΓΔ^2$, οπότε το τρίγωνο ΒΓΔ δεν είναι ορθογώνιο.

13. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 12 cm. Το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ και ΒΡ = 3 cm.
α) Να υπολογίσετε τα $ΜΔ^2$, $ΜΡ^2$ και $ΔΡ^2$.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΡΔ είναι ορθογώνιο στο Μ.

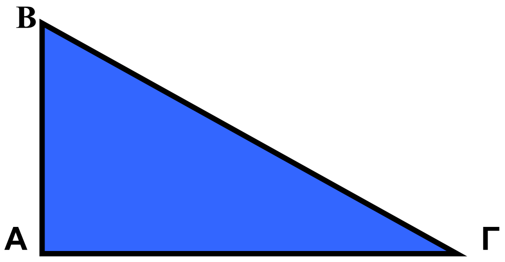


Λύση:
α) Αφού το Μ είναι μέσο του ΑΒ, είναι ΑΜ = ΜΒ = 6 (cm).
Επίσης: ΓΡ = 12 – 3 = 9 (cm).
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΜΔ έχουμε:
$ΜΔ^2 = ΑΔ^2 + ΑΜ^2 = 12^2 + 6^2 = 144 + 36 = 180$.
Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΒΡ έχουμε:
$ΜΡ^2 = ΜΒ^2 + ΒΡ^2 = 6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45$,
και στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΡ έχουμε:
$ΔΡ^2 = ΔΓ^2 + ΡΓ^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$.
β) Είναι $ΜΔ^2 + ΜΡ^2 = 180 + 45 = 225 = ΔΡ^2$, οπότε σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος, το τρίγωνο ΜΡΔ είναι ορθογώνιο στο Μ.

14. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ = 13 cm. Αν η μία κάθετη πλευρά έχει μήκος ΑΒ = 5 cm, να υπολογίσετε τις εφαπτομένες των γωνιών Β και Γ.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι:



$$εφB = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$$

και

$$εφΓ = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$$

Επομένως, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το μήκος της κάθετης πλευράς ΑΓ.
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα γνωρίζουμε ότι
$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2$ και αντικαθιστώντας με ΑΒ = 5 cm και ΒΓ = 13 cm, έχουμε:

$5^2 + ΑΓ^2 = 13^2$ ή $25 + ΑΓ^2 = 169$ ή $ΑΓ^2 = 169 - 25 = 144$

Επομένως, $ΑΓ = \sqrt{144} = 12$ (cm).

Άρα: $εφB = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{12}{5}$ και $εφΓ = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{5}{12}$.

15. Να σχεδιάσετε μια γωνία ω, με εφω =1/5

Λύση:

Σύμφωνα με τον ορισμό της εφαπτομένης οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, ισχύει:

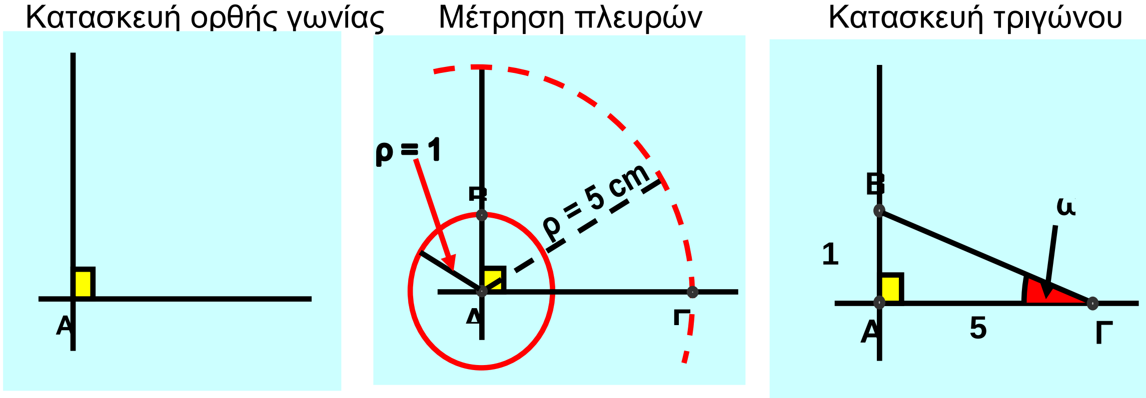
$$εφω = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$

Επομένως, για να σχεδιάσουμε μια οξεία γωνία ω με εφω = $\frac{1}{5}$, αρκεί να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο που η μία κάθετη πλευρά του θα είναι ίση με 1 και η άλλη κάθετη πλευρά ίση με 5.

1ο βήμα — Κατασκευή ορθής γωνίας

2ο βήμα — Μέτρηση πλευρών

3ο βήμα — Κατασκευή τριγώνου

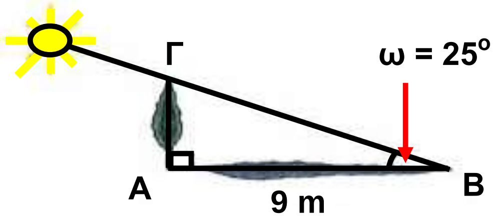


Για τη γωνία ω ισχύει: εφω = ΑΒ/ΑΓ = 1/5 .

16. Να υπολογίσετε το ύψος του κυπαρισσιού του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας το μήκος της σκιάς του και τη γωνία ω.

Λύση:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ γνωρίζουμε ότι ΑΒ = 9 m και Β = ω = 25^o.



Θέλουμε να υπολογίσουμε την πλευρά ΑΓ.
Ο τριγωνομετρικός αριθμός που συνδέει την απέναντι με την προσκείμενη πλευρά μιας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι η εφαπτομένη της γωνίας Β. Έχουμε λοιπόν: εφΒ = ΑΓ/ΑΒ οπότε:

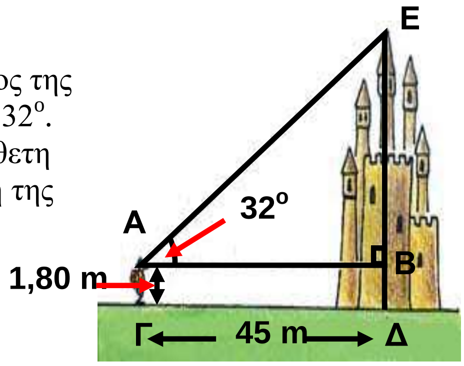
ΑΓ = ΑΒ • εφΒ άρα ΑΓ = 9 • εφ25^o

Με τη βοήθεια του πίνακα εφαπτομένων βρίσκουμε ότι εφ25^o = 0,47.
Άρα, ΑΓ = 9 • 0,47 = 4,23, δηλαδή το ύψος του κυπαρισσιού είναι 4,23 m.

17. Ένας τουρίστας ύψους ΑΓ = 1,80 m «βλέπει» τον πύργο με γωνία 32^o και απέχει από αυτόν 45 m. Να υπολογίσετε το ύψος ΕΔ του πύργου.

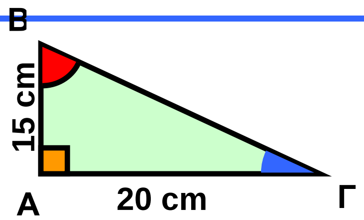
Λύση:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ γνωρίζουμε το μήκος της κάθετης πλευράς ΑΒ = 45 m και μια οξεία γωνία 32^o.
Επομένως, για να υπολογίσουμε την άλλη κάθετη πλευρά ΒΕ, χρησιμοποιούμε την εφαπτομένη της γωνίας των 32°.



Είναι: εφ32^o =ΒΕ/ΑΒ=ΒΕ/45
Από τον πίνακα εφαπτομένων βρίσκουμε:
εφ32^o = 0,62, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται:
0,62 = ΒΕ/45 οπότε έχουμε:
ΒΕ = 45 • 0,62 = 27,9 (m).
Επομένως, το συνολικό ύψος του πύργου είναι:
ΔΕ = ΔΒ + ΒΕ = 1,8 + 27,9 = 29,7(m).

18. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές ΑΒ = 15 cm και ΑΓ = 20 cm. Να υπολογίσετε τα ημίτονα και τα συνημίτονα των γωνιών Β και Γ. Τι παρατηρείτε;



Λύση:

Για τον υπολογισμό του ημιτόνου ή του συνημιτόνου μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, πρέπει να γνωρίζουμε και το μήκος της υποτείνουσας ΒΓ. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625$ οπότε

$ΒΓ = \sqrt{625} = 25$ cm.

Άρα: $\eta\mu B = \dfrac{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\tau\iota..\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau o\varsigma}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}} = \dfrac{20}{25} = \dfrac{4}{5} = 0.8$

$\sigma\upsilon\nu \mathrm{B} = \dfrac{\pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta..\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau o\varsigma}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}} = \dfrac{15}{25} = \dfrac{3}{5} = 0.6$

$\eta\mu\Gamma = \dfrac{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\tau\iota..\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau o\varsigma}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}} = \dfrac{15}{25} = \dfrac{3}{5} = 0.6$

$\sigma\upsilon\nu\Gamma = \dfrac{\pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta..\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau o\varsigma}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}} = \dfrac{20}{25} = \dfrac{4}{5} = 0.8$

Άρα παρατηρώ ότι ημΒ=συνΓ και συνΒ=ημΓ

19. Να σχεδιάσετε μια οξεία γωνία ω, με ημω =3/5

Λύση:

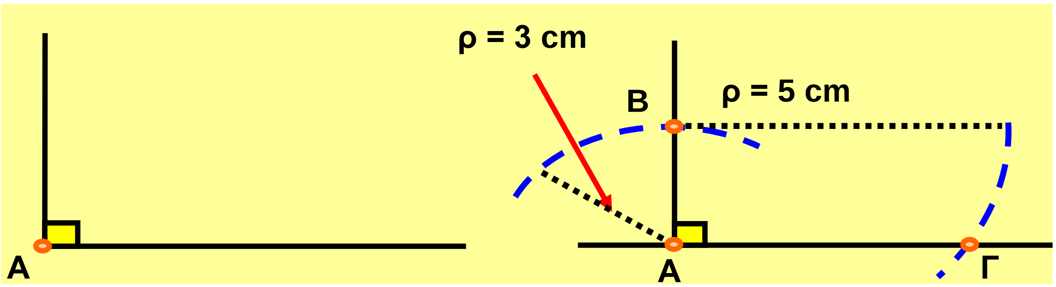
Σύμφωνα με τον ορισμό του ημιτόνου οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, ισχύει:

$$\eta\mu\omega = \frac{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\tau\iota..\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau o\varsigma}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}$$

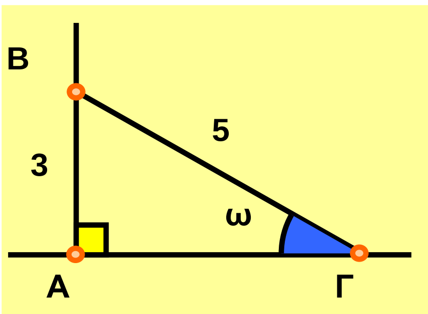
Επομένως, για να κατασκευάσουμε οξεία γωνία ω με ημω = 3/5, αρκεί να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο στο οποίο η μία κάθετη πλευρά του θα είναι ίση με 3 και η υποτείνουσά του ίση με 5.

1ο βήμα
Κατασκευή
ορθής γωνίας

2ο βήμα
Μέτρηση



3ο βήμα
Κατασκευή τριγώνου



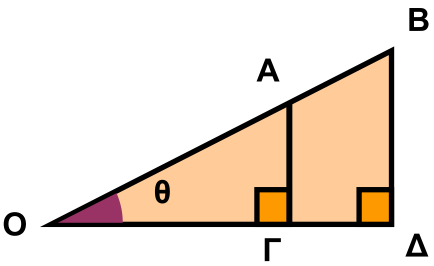
Για τη γωνία ω ισχύει:

ημω = ΑΒ/ΒΓ = 3/5 .

20. Στο παρακάτω σχήμα είναι ΟΑ = 5 cm, ΟΒ = 8 cm και ΑΓ = 2 cm. Να υπολογίσετε την απόσταση ΒΔ.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι στο σχήμα υπάρχουν δύο ορθογώνια τρίγωνα, τα ΟΑΓ και ΟΒΔ με κοινή γωνία θ.



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΓ έχουμε:

$ημθ = \frac{ΑΓ}{ΟΑ}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΔ έχουμε:

$ημθ = \frac{ΒΔ}{ΟΒ}$.

Αρα, θα ισχύει ότι: $\frac{ΑΓ}{ΟΑ} = \frac{ΒΔ}{ΟΒ}$

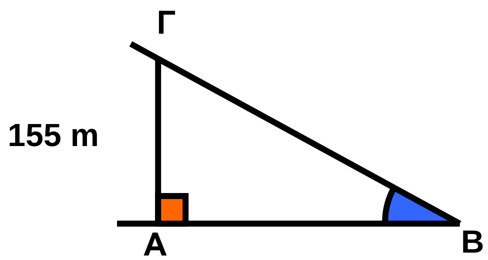
οπότε: ΟΑ·ΒΔ = ΑΓ • ΟΒ ή 5• ΒΔ=2· 8 ή 5β ΒΔ=16/5 άρα ΒΔ= 3,2 cm.

21. Το ημίτονο της γωνίας που σχηματίζει μια πίστα του σκι με το οριζόντιο επίπεδο είναι ημΒ = 0,31. Αν ένας σκιέρ βρίσκεται σε σημείο Γ ύψους ΑΓ = 155 m από το έδαφος, να βρεθεί η απόσταση ΒΓ που θα διανύσει ο σκιέρ ώσπου να φτάσει στο έδαφος.

Λύση:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90^o) πρέπει να βρούμε την πλευρά (υποτείνουσα) ΒΓ

γνωρίζοντας ότι: ΑΓ = 155 m και



ημΒ = 0,31.

Έχουμε ότι: $ημΒ = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$ ή $ΒΓ = \frac{ΑΓ}{ημΒ}$

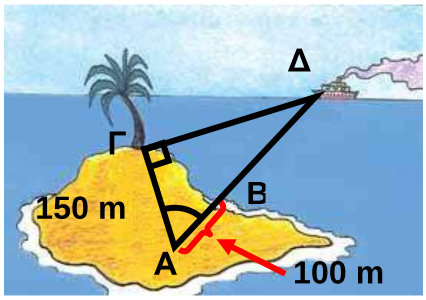
ή $ΒΓ = \frac{155}{0.31}$ ή ΒΓ = 500 m.

22. Ένας παρατηρητής Α, που βρίσκεται 100 m από την ακτή Β και 150 m από ένα δέντρο Γ, θέλει να υπολογίσει την απόσταση ΒΔ του πλοίου Δ από την ακτή Β. Μ' ένα γωνιόμετρο (ένα όργανο που μας επιτρέπει να μετράμε γωνίες) σκοπεύει το πλοίο και το δέντρο και βρίσκει τη γωνία ΔΑΓ=70^o. Αν Γ = 90^o, να υπολογίσετε την απόσταση ΔΒ.

Λύση:

Έστω x = ΒΔ η απόσταση του πλοίου από την ακτή.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ χρησιμοποιούμε το συνημίτονο της γωνίας των 70^o.



Είναι: $συν70^o = \frac{προσκείμενη..κάθετος}{υποτείνουσα}$

$\sigma\upsilon\nu\, 70^0 = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΔ}} = \frac{150}{\text{ΑΔ}}$

Μ' έναν επιστημονικό υπολογιστή τσέπης βρίσκουμε: συν70^o = 0,34, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$0{,}34 = \frac{150}{\text{ΑΔ}}$ και έχουμε: ΑΔ·0.34=150 ή (100 + x) • 0,34 = 150 ή

34 + 0,34 • x = 150 ή 0,34 • x = 150 – 34 ή x = 341,18 (m).

23. Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα: ημ$^2 45^o$ = 1 - ημ30^o.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι ημ$45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$ οπότε

ημ$^2 45^o = \frac{(\sqrt{2})^2}{2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ Επίσης γνωρίζουμε ότι: ημ$30^o = \frac{1}{2}$

οπότε 1 – ημ30^o = 1 - $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$. Επομένως ημ$^2 45^o$ = 1 - ημ30^o = $\frac{1}{2}$.

24. Να αποδείξετε ότι το ύψος και το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ πλευράς α, δίνονται από τους τύπους: υ = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ και Ε = $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Λύση:

Φέρνουμε το ύψος ΑΜ του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ, οπότε:

ημΒ = ημ$60^o = \frac{\upsilon}{\alpha/2}$

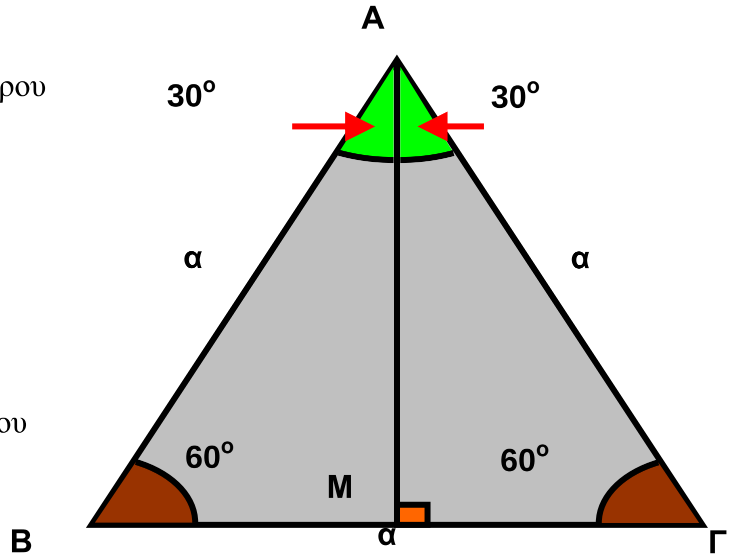
$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\upsilon}{\alpha/2}$ ή $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2\cdot 2} = \upsilon$

ή $\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}$

Το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου είναι:

(ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}$ α•υ = $\frac{1}{2} . \alpha \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}$.

(ΑΒΓ) = $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$



25. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:
$A = ημ30^o + συν60^o + 2συν30^o - 2εφ45^o + 2ημ45^o$.

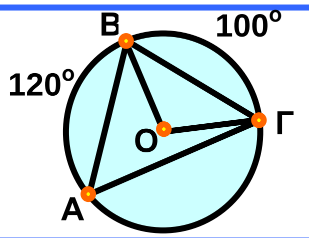
Λύση:

Έχουμε: $A = ημ30^o + συν60^o + 2συν30^o - 2εφ45^o + 2ημ45^o =$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2\,\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\quad 1 + 2\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 1 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{2} = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$$

26. Σε ένα κύκλο (Ο, ρ) θεωρούμε τρία σημεία Α, Β, Γ, έτσι ώστε $AB = 120^o$ και $ΒΓ = 100^o$.
Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



Λύση:

Αφού $ΒΓ = 100^o$, τότε η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ΒΟΓ θα είναι και αυτή ίση με 100^o.
Επομένως, η γωνία ΒΑΓ που είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο ίδιο τόξο ΒΓ με την επίκεντρη ΒΟΓ θα είναι:

$ΒΑΓ = ΒΟΓ/2 = 50^o$. Ομοίως προκύπτει ότι: $ΒΓΑ = 120^0/2 = 60^o$.
Επειδή το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ είναι 180^o, θα ισχύει ότι:

$ΑΒΓ = 180^o - 50^o - 60^o = 70^o$.

27. Στο παρακάτω σχήμα η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου. Να υπολογίσετε τα διαδοχικά τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Λύση:

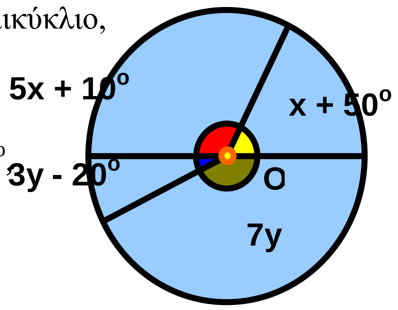
Τα διαδοχικά τόξα ΒΓ και ΓΔ σχηματίζουν ημικύκλιο,
οπότε:
$5x + 10^o + x + 50^o = 180^o$ ή
$6x = 120^o$, επομένως $x = 20^o$.
Ομοίως τα διαδοχικά τόξα ΒΑ και ΑΔ σχηματίζουν ημικύκλιο,
οπότε: $3y - 20^o + 7y = 180^o$, επομένως

$10y = 200^o$ ή $y = 20^o$.

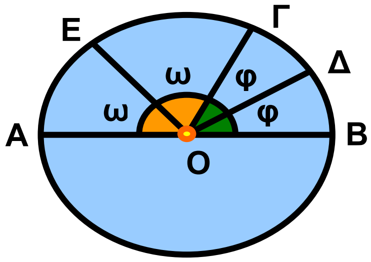
Έχουμε ότι: $AB = 3y - 20^o = 3{\cdot}20^0 - 20^0 = 60^o - 20^o = 40^o$,

$ΒΓ = 5 \cdot 20^o + 10^o = 110^o$, $ΓΔ = 20^o + 50^o = 70^o$,

$ΔΑ = 7 \cdot 20^o = 140^o$.



28. Στο παρακάτω σχήμα η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου και οι ΟΔ, ΟΕ είναι διχοτόμοι των γωνιών ΒΟΓ, ΑΟΓ αντίστοιχα. Να υπολογιστεί το τόξο ΕΔ.



Λύση:

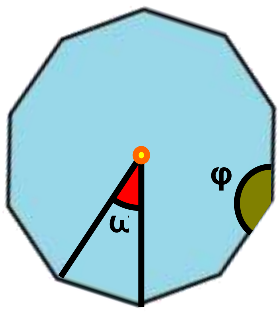
Αφού οι ΟΔ, ΟΕ είναι διχοτόμοι των γωνιών ΒΟΓ και ΑΟΓ αντίστοιχα,

θεωρούμε ότι ΒΟΔ = ΔΟΓ = φ και ΑΟΕ = ΕΟΓ = ω.

Όμως, ΔΟΕ = ΔΟΓ + ΕΟΓ = φ + ω.
Έχουμε ΒΟΓ + ΓΟΑ = 180^o, δηλαδή $2φ + 2ω = 180^o$, οπότε $φ + ω = 90^o$.
Άρα ΔΟΕ = 90^o και το αντίστοιχο τόξο ΕΔ είναι ίσο με 90^o

29. α) Να βρείτε τη γωνία του κανονικού δεκαγώνου.
β) Να βρείτε ποιο κανονικό πολύγωνο έχει γωνία 162^o.

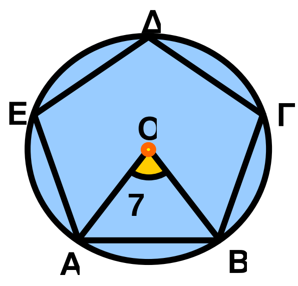
Λύση:



α) Αν ονομάσουμε φ τη γωνία του κανονικού δεκαγώνου και ω την κεντρική του γωνία, έχουμε:
$φ = 180^o - ω = 180^o - 360/10 = 180^o - 36^o = 144^o$.
β) ισχύει ότι: $φ = 180^o - ω$ ή $162^o = 180^o – 360/ν$ ή
$360/ν = 180^o - 162^o$ ή $360/ν = 18^o$
ή $ν = 360/18$ ή $ν = 20$.
Δηλαδή το κανονικό εικοσάγωνο έχει γωνία $φ = 162^o$.

30. Να κατασκευαστεί κανονικό πεντάγωνο.

Λύση:

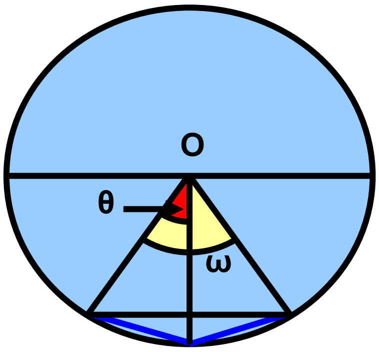


Γράφουμε κύκλο (Ο, ρ) και σχηματίζουμε μια επίκεντρη γωνία ΑΟΒ = $360/ν = 360 / 5 = 72^o$.
Με το διαβήτη θεωρούμε διαδοχικά τόξα ίσα με το ΑΒ.

Φέρνουμε τις χορδές των παραπάνω τόξων.

31. Δίνεται ένα κανονικό ν-γωνο. Να κατασκευάσετε το κανονικό πολύγωνο που έχει διπλάσιες πλευρές (2ν-γωνο).

Λύση:



Αν ω είναι η κεντρική γωνία του πολυγώνου που έχει ν πλευρές, και θ η κεντρική γωνία του πολυγώνου με 2ν πλευρές, έχουμε ότι

ω = 360/ν και θ = 360 / 2ν

Επομένως, θ = ω/2 .

Αν φέρουμε τις διχοτόμους των κεντρικών γωνιών του ν-γώνου, οι γωνίες που θα σχηματιστούν θα είναι οι κεντρικές γωνίες του πολυγώνου με 2ν πλευρές.

Οι διχοτόμοι, όπως γνωρίζουμε, διέρχονται από τα μέσα των τόξων. Τα μέσα αυτών των τόξων και οι κορυφές του αρχικού ν-γώνου αποτελούν τις κορυφές του κανονικού πολυγώνου με 2ν πλευρές.

32. Ένας κύκλος έχει μήκος L = 9,42 cm. Να βρείτε το μήκος της ακτίνας του.

Λύση:

Για το μήκος του κύκλου ισχύει ότι:

$L = 2\pi\rho$ ή $\rho = \frac{L}{2\pi} = \frac{9,42}{2 \cdot 3,14} = 1,5$ cm.

33. Ένας κύκλος έχει μήκος 10 cm περισσότερο από έναν άλλο. Πόσο μεγαλύτερη είναι η ακτίνα του;

Λύση:

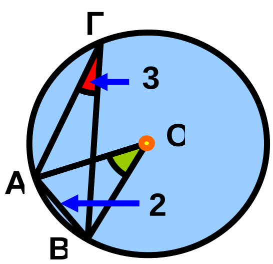
Θα ισχύει ότι: $L_1 = L_2 + 10$ ή $2\pi\rho_1 = 2\pi\rho_2 + 10$. Επομένως:

$\rho_1 = \rho_2 + 10/2\pi$ ή $\rho_1 = \rho_2 + 10/6.28$ ή $\rho_1 = \rho_2 + 1,59$.

Δηλαδή, η ακτίνα του πρώτου κύκλου είναι μεγαλύτερη κατά 1,59 cm της ακτίνας του δεύτερου.

34. Να υπολογιστεί το μήκος του κύκλου στο παρακάτω σχήμα.

Λύση:



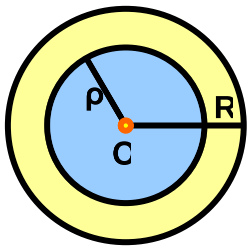
Η εγγεγραμμένη γωνία ΑΓΒ είναι ίση με 30^o, οπότε βρίσκουμε την αντίστοιχη επίκεντρη ΑΟΒ = $2 \cdot 30^o = 60^o$. Επομένως το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισόπλευρο με ΟΑ = ΟΒ = ΑΒ = 2 cm, οπότε ρ = 2 cm. Άρα, το μήκος του κύκλου είναι:

$L = 2\pi\rho = 2 \cdot 3,14 \cdot 2 = 12,56$ cm.

35. Αν το μήκος ενός κύκλου είναι 6,28 cm, να βρείτε το εμβαδόν του.

Λύση:
Το μήκος του κύκλου δίνεται από τον τύπο L = 2πρ, δηλαδή 6,28 = 2 • 3,14 ρ, οπότε ρ = 1 (cm).
Τότε, το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου είναι: $E = \pi\rho^2 = 3,14 \cdot 1^2 = 3,14$ (cm^2).

36. Στο διπλανό σχήμα η κίτρινη περιοχή που βρίσκεται ανάμεσα στους δύο κύκλους ονομάζεται κυκλικός δακτύλιος.
Αν το εμβαδόν του κίτρινου δακτυλίου είναι ίσο με το εμβαδόν του μπλε κυκλικού δίσκου, ο οποίος έχει ακτίνα ρ = $\sqrt{2}$ cm, να βρείτε την ακτίνα R του μεγάλου κύκλου.



Λύση:
Το εμβαδόν Ε του δακτυλίου ισούται με τη διαφορά των εμβαδών
$E_1 = \pi R^2$ και $E_2 = \pi\rho^2$
των δύο κυκλικών δίσκων. Επομένως, $E = E_1 - E_2 = \pi R^2 - \pi\rho^2$.
Αφού $E = E_2$, θα έχουμε:
$\pi R^2 - \pi\rho^2 = \pi\rho^2$ ή $\pi R^2 = 2\pi\rho^2$ ή $R^2 = 2\rho^2$ ή $R^2 = 2(\sqrt{2})^2 = 4$. Οπότε: R = 2 cm.

37. Μια πιτσαρία προσφέρει πίτσες κυκλικού σχήματος σετρία μεγέθη: τη μικρή, τη μεσαία και τη μεγάλη. Η μικρή έχει διάμετρο 23 cm και κοστίζει 7 €. Η μεσαία έχει διάμετρο 28 cm και κοστίζει 8 € και 50 λεπτά. Η μεγάλη έχει διάμετρο 33 cm και κοστίζει 11 € και 90 λεπτά. Ποια από τις τρεις πίτσες συμφέρει από άποψη τιμής;

Λύση:
Για να συγκρίνουμε τις 3 πίτσες, αρκεί να βρούμε το κόστος τού 1 cm^2 για κάθε πίτσα. Η μικρή έχει εμβαδόν:
$E_1 = \pi\rho_1^2 = \pi \cdot (23/2)^2 = 415,27$ (cm^2).

Η μεσαία έχει εμβαδόν:
$E_2 = \pi\rho_2^2 = \pi \cdot 14^2 = 615,44$ (cm^2).
Η μεγάλη έχει εμβαδόν:
$E_3 = \pi\rho_3^2 = \pi \cdot (33/2)^2 = 854,87$ (cm^2).
Το κόστος του 1 cm^2 για κάθε πίτσα είναι: $\frac{700}{415,27}$ $\frac{850}{615,44}$ $\frac{1190}{854,87}$

Μικρή	=1,69 (λεπτα/cm^2)
Μεσαία	=1,38 (λεπτα/cm^2)
Μεγάλη	=1,39 (λεπτα/cm^2)

Επομένως, συμφέρει να αγοράσουμε τη μεσαία πίτσα.