



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ 1ο «ΑΛΓΕΒΡΑ»

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = 2(x + 3) - 4(x - 1) - 8$, όταν $x = -0,45$.

Λύση:

Απλοποιούμε πρώτα την παράσταση :

$$\begin{aligned} A &= 2(x + 3) - 4(x - 1) - 8 = \\ &= 2x + 6 - 4x + 4 - 8 = \\ &= 2x - 4x + 6 + 4 - 8 = -2x + 2 \end{aligned}$$

Επομένως, όταν $x = -0,45$, είναι:

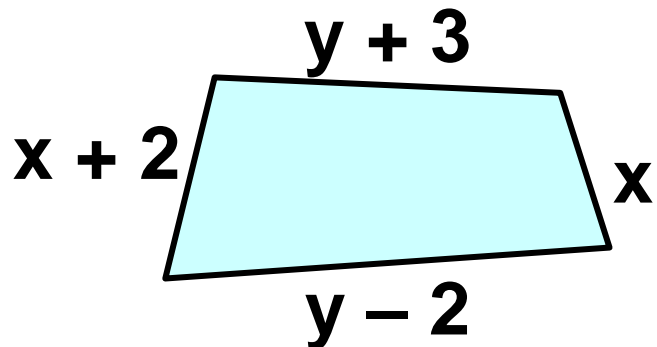
$$A = -2 \cdot (-0,45) + 2 = 0,9 + 2 = 2,9.$$

2. Να υπολογίσετε την περίμετρο του παρακάτω τετραπλεύρου, όταν $x + y = 10$.

Λύση:

Η περίμετρος του τετραπλεύρου είναι ίση με:

$$\begin{aligned} \Pi &= x + (y + 3) + (x + 2) + (y - 2) = \\ &= x + y + 3 + x + 2 + y - 2 = \\ &= x + x + y + y + 3 + 2 - 2 = \\ &= 2x + 2y + 3 = 2(x + y) + 3 \end{aligned}$$



Επειδή $x + y = 10$,

$$\text{είναι } \Pi = 2 \cdot 10 + 3 = 20 + 3 = 23.$$

3. Να λυθεί η εξίσωση: $2(x - 1) + 3(2 - x) = 4(x + 2)$

Λύση:

$$\text{Έχουμε διαδοχικά: } 2x - 2 + 6 - 3x = 4x + 8$$

Κάνουμε τις πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα)

$$2x - 3x - 4x = 8 + 2 - 6$$

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους

$$-5x = 4$$

Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων

$$\frac{-5x}{-5} = \frac{4}{-5}$$

Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου

$$\text{Άρα } x = -\frac{4}{5}$$

4. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{y+1}{2} + y = \frac{2y+3}{3} + 2$

Λύση:

$$6 \left(\frac{y+1}{2} + y \right) = 6 \left(\frac{2y+3}{3} + 2 \right)$$

$$6 \frac{y+1}{2} + 6y = 6 \frac{2y+3}{3} + 6 \cdot 2$$

$$3y + 6y - 4y = 6 + 12 - 3$$

$$5y = 15$$

$$\frac{5y}{5} = \frac{15}{5}$$

$$\text{Άρα } y = 3$$

5. Να λυθεί η εξίσωση: $2(3-x)+4(x-1)=2x+5$

Λύση:

$$2(3-x)+4(x-1)=2x+5$$

$$6-2x+4x-4=2x+5$$

$$-2x+4x-2x=-6+4+5$$

$$0x=3$$

αδύνατη.

6. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{3}{5} - \frac{2x+1}{10} = \frac{5-2x}{10}$

Λύση:

Έχουμε διαδοχικά:

$$10 \frac{3}{5} - 10 \frac{2x+1}{10} = 10 \frac{5-2x}{10}$$

$$2 \cdot 3 - (2x+1) = 5 - 2x$$

$$6 - 2x - 1 = 5 - 2x$$

$$-2x + 2x = 5 - 6 + 1$$

$$0x = 0$$

κάθε αριθμός είναι λύση της εξίσωσης. Μια τέτοια εξίσωση λέγεται ταυτότητα.

7. Να βρείτε τον αριθμό που το διπλάσιο του, αν το ελαττώσουμε κατά 8, δίνει τον αριθμό αυξημένο κατά 9.

Λύση:

Ονομάζουμε τον άγνωστο αριθμό x . Το διπλάσιο είναι $2x$. Αν το ελαττώσουμε κατά 8, είναι $2x - 8$. Ο αριθμός αυξημένος κατά 9 είναι $x + 9$.



Συνδέουμε τα παραπάνω σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος και προκύπτει η εξίσωση:

$$2x - 8 = x + 9$$

$$2x - x = 9 + 8$$

$$\text{ή } x = 17$$

δηλαδή, ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 17.

8. Μία βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε 10 λεπτά. Μια άλλη βρύση γεμίζει την ίδια δεξαμενή σε 15 λεπτά. Σε πόσα λεπτά της ώρας γεμίζει η δεξαμενή, αν ανοίξουν και οι δύο βρύσες;

Λύση:

Έστω, ότι και οι δύο μαζί γεμίζουν την δεξαμενή σε x λεπτά. Αφού η πρώτη γεμίζει σε 10 λεπτά, σε ένα λεπτό θα γεμίζει το $1/10$ και σε x λεπτά τα $x/10$ της δεξαμενής.

Ομοίως, η δεύτερη βρύση σε x λεπτά θα γεμίσει τα $x/15$ της δεξαμενής. Αφού και οι δύο μαζί θα γεμίσουν τη δεξαμενή, έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{10} + \frac{x}{15} = 1$$

$$30 \cdot \frac{x}{10} + 30 \cdot \frac{x}{15} = 30 \cdot 1$$

$$3x + 2x = 30$$

$$5x = 30$$

$$x = 6$$

Επομένως, και οι δύο βρύσες γεμίζουν την δεξαμενή σε 6 λεπτά

9. Η ανιγιά μου η Μαρίζα έγραψε 16 και 18 σε δύο Διαγωνίσματα Μαθηματικών.
α) Τι βαθμό πρέπει να γράψει στο τρίτο διαγώνισμα για να έχει μέσο όρο 18 και στα τρία διαγωνίσματα;
β) Μπορεί να βγάλει μέσο όρο 19;

Λύση:

Έστω x ο βαθμός που θα πάρει η Μαρίζα στο τρίτο διαγώνισμα. Ο μέσος όρος των τριών διαγωνίσματων προκύπτει, αν διαιρέσουμε το άθροισμά τους δια δηλαδή:

$$\frac{16 + 18 + x}{3}$$

α) Για να βγάλει μέσο όρο 18, πρέπει:

$$\frac{16 + 18 + x}{3} = 18$$

$$3 \cdot \frac{16 + 18 + x}{3} = 3 \cdot 18$$

$$34 + x = 54$$

$$x = 54 - 34$$

$$x = 20$$

Άρα, για να βγάλει μέσο όρο 18, πρέπει να γράψει 20 στο τρίτο διαγώνισμα. Ο αριθμός αυτός επαληθεύει το πρόβλημα, γιατί

$$\frac{16 + 18 + 20}{3} = 18$$

β) Για να βγάλει μέσο όρο 19, πρέπει

$$\frac{16 + 18 + x}{3} = 19$$

$$\text{άρα } 34 + x = 57 \text{ ή } x = 23$$

Φυσικά, επειδή δεν είναι δυνατόν να γράψει βαθμό 23 λέμε ότι, παρόλο που η εξίσωση λύθηκε, η λύση της απορρίπτεται. Δηλαδή, είναι αδύνατον η Μαρίζα να βγάλει μέσο όρο 19.

10. Τρία αδέρφια μοιράστηκαν ένα χρηματικό ποσό. Ο μικρότερος έλαβε το $\frac{1}{5}$ του ποσού και 12 € ακόμη, ο μεσαίος έλαβε το $\frac{1}{4}$ του ποσού και 8 € ακόμη και ο μεγαλύτερος έλαβε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και 6 € ακόμη. Να βρεθεί το αρχικό χρηματικό ποσό και το μερίδιο του καθενός.

Λύση:

Έστω x το αρχικό ποσό.

❖ Ο μικρότερος έλαβε το $\frac{1}{5}$ του ποσού και 12 € ακόμη, δηλαδή

$$\frac{1}{5}x + 12$$

❖ Ο μεσαίος έλαβε το $\frac{1}{4}$ του ποσού και 8 € ακόμη, δηλαδή

$$\frac{1}{4}x + 8$$

❖ Ο μεγαλύτερος έλαβε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και 6 € ακόμη, δηλαδή

$$\frac{1}{3}x + 6$$

Το άθροισμα των τριών αυτών ποσών είναι το αρχικό ποσό x που μοιράστηκαν. Έτσι, έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{1}{5}x + 12 + \frac{1}{4}x + 8 + \frac{1}{3}x + 6 = x$$

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} + 26 = x$$

$$60 \frac{x}{5} + 60 \frac{x}{4} + 60 \frac{x}{3} + 60 \cdot 26 = 60x$$

$$12x + 15x + 20x + 1560 = 60x$$

$$12x + 15x + 20x - 60x = -1560$$

$$-13x = -1560$$

$$x = \frac{-1560}{-13}$$

$$x = 120$$

Άρα, το αρχικό ποσό ήταν 120 €. Ο μικρότερος πήρε

$$1/5 \cdot 120 + 12 = 24 + 12 = 36 \text{ €},$$

ο μεσαίος πήρε

$$1/4 \cdot 120 + 8 = 30 + 8 = 38 \text{ € και}$$

ο μεγαλύτερος πήρε

$$1/3 \cdot 120 + 6 = 40 + 6 = 46 \text{ €}.$$

Οι αριθμοί αυτοί επαληθεύουν το πρόβλημα, αφού $36 + 38 + 46 = 120$.

11. Να λύσετε την ανίσωση $2(x - 1) - 3(x + 1) \leq 4(x + 2) + 12$. Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

Λύση:

Η ανίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$2x - 2 - 3x - 3 \leq 4x + 8 + 12$$

Κάνουμε τις πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα)

$$2x - 3x - 4x \leq 8 + 12 + 2 + 3$$

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους

$$-5x \leq 25$$

Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων

$$\frac{-5x}{-5} \geq \frac{25}{-5}$$

Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου. Προσοχή όμως.

Διαιρέσαμε με αρνητικό αριθμό γι' αυτό αλλάξαμε φορά στην ανίσωση.

$$x \geq -5$$

Στη συνέχεια, παριστάνουμε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών: Η μπλε τελεία ακριβώς πάνω στο -5 σημαίνει ότι και ο αριθμός αυτός είναι λύση της ανίσωσης.



12. Να λύσετε την ανίσωση $2(x - 1) - 3(x + 2) < 4(x + 1) - 5(x - 2)$.

Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

Λύση:

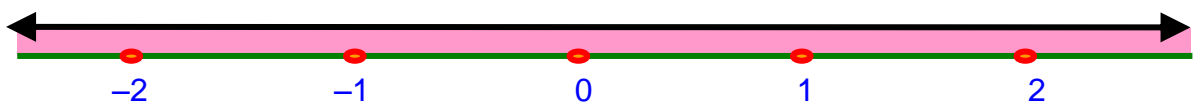
Η ανίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$2x - 2 - 3x - 6 < 4x + 4 - 5x + 10$$

$$2x - 3x - 4x + 5x < 4 + 10 + 2 + 6$$

$$0x < 22$$

Παρατηρούμε ότι, η ανίσωση αυτή αληθεύει για κάθε τιμή του αριθμού x . Η παράσταση των λύσεων αυτών στην ευθεία των αριθμών θα είναι όλη η ευθεία.



13. Να λύσετε την ανίσωση

$$x + 2 + 2(x - 3) > 3x + 4$$

Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

Λύση:

Η ανίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$x + 2 + 2x - 6 > 3x + 4$$

$$x + 2x - 3x > 4 - 2 + 6$$

$$0x > 8$$

Παρατηρούμε ότι, η ανίσωση αυτή δεν αληθεύει για καμιά τιμή του αριθμού x . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ανίσωση είναι αδύνατη.

Στην παράσταση των λύσεων αυτών στην ευθεία των αριθμών δε θα σημειώσουμε τίποτα, γιατί κανένας αριθμός δεν είναι λύση αυτής της ανίσωσης.

14. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$3x - 5 \leq x + 3 \text{ και } 4 < 14 + 5x.$$

Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

Λύση:

Λύνουμε χωριστά τις δύο ανισώσεις:

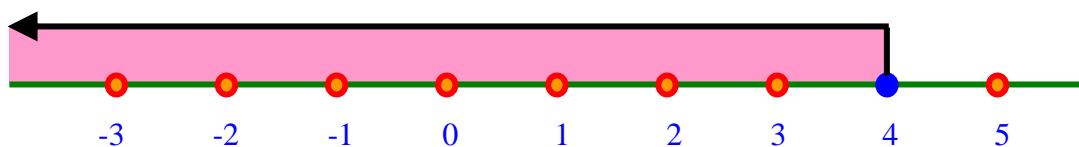
$$3x - 5 \leq x + 3$$

$$3x - x \leq 3 + 5$$

$$2x \leq 8$$

$$x \leq 4$$

Η παράσταση των λύσεων της πρώτης ανίσωσης στην ευθεία των αριθμών:



$$4 < 14 + 5x$$

$$4 - 14 < 5x$$

$$-10 < 5x$$

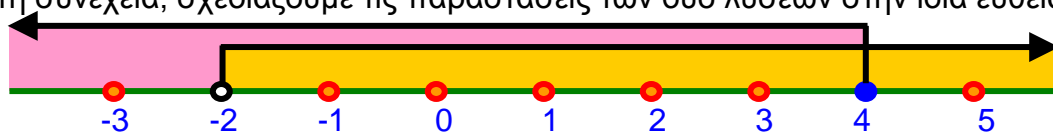
$$\frac{-10}{5} < \frac{5x}{5}$$

$$-2 < x$$

Η παράσταση των λύσεων της δεύτερης ανίσωσης στην ευθεία των αριθμών:



Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τις παραστάσεις των δύο λύσεων στην ίδια ευθεία.





Όπως βλέπουμε από το σχήμα, οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι οι αριθμοί που βρίσκονται ανάμεσα στο -2 και στο 4. Άρα, είναι οι αριθμοί x για τους οποίους ισχύει: $-2 < x \leq 4$.

Παρατήρηση: Η σχέση $-2 < x \leq 4$ είναι μια διπλή ανίσωση, γιατί ισχύουν συγχρόνως και η $x > -2$ και η $x \leq 4$.

15. Να βρείτε τους αριθμούς:

$$\sqrt{25}, \quad \sqrt{49}, \quad \sqrt{64}, \quad \sqrt{121}.$$

Λύση:

Αν $x = \sqrt{25}$ τότε $x^2 = 25$. Άρα πρέπει να βρούμε ένα θετικό αριθμό του οποίου το τετράγωνο να ισούται με 25. Με δοκιμές βρίσκουμε εύκολα ότι $5^2 = 25$, δηλαδή $x = 5$.

Ομοίως, βρίσκουμε ότι:

$$\sqrt{49} = 7 \text{ γιατί } 7^2 = 49,$$

$$\sqrt{64} = 8 \text{ γιατί } 8^2 = 64,$$

$$\sqrt{121} = 11 \text{ γιατί } 11^2 = 121.$$

16. Να υπολογίσετε την άγνωστη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου του παρακάτω σχήματος.

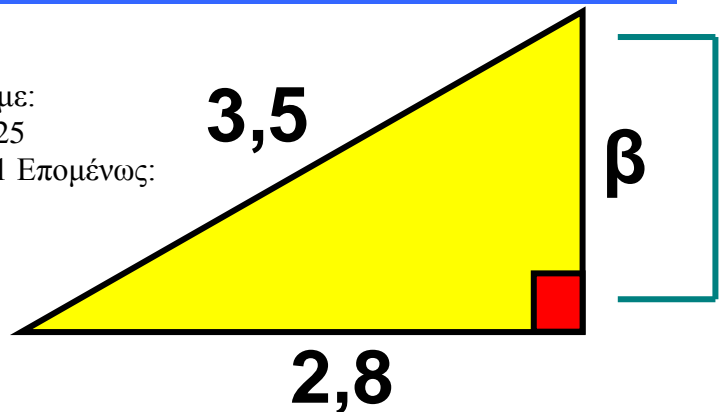
Λύση:

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

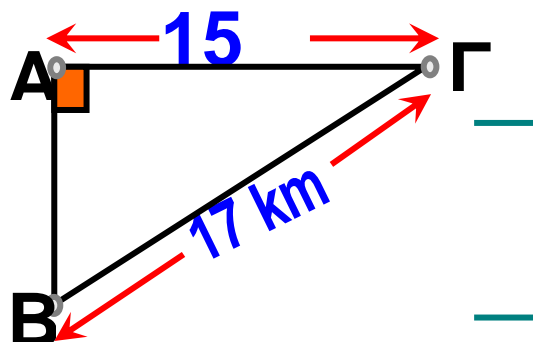
$$\beta^2 + 2,8^2 = 3,5^2 \quad \text{ή} \quad \beta^2 + 7,84 = 12,25$$

$$\text{ή} \quad \beta^2 = 12,25 - 7,84 \quad \text{ή} \quad \beta^2 = 4,41 \quad \text{Επομένως:}$$

$$\beta = \sqrt{4,41} = 2,1$$



17. Πόσο απέχει η πόλη Α από την πόλη Β;



Λύση:

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

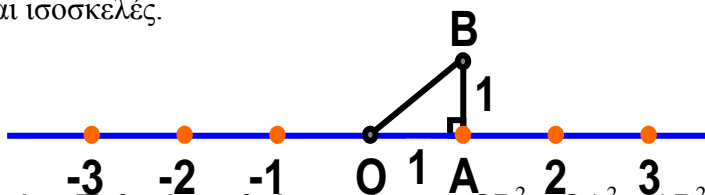
$$AB^2 + AG^2 = BG^2 \text{ ή } AB^2 + 15^2 = 17^2 \text{ ή } AB^2 + 225 = 289 \text{ ή } AB^2 = 289 - 225 \text{ ή } AB^2 = 64 \text{ οπότε } AB = \sqrt{64} \text{ ή } AB = 8$$

Επομένως, η πόλη Α απέχει 8 km από την πόλη Β.

18. Να κατασκευάσετε γεωμετρικά τον άρρητο αριθμό $\sqrt{2}$.

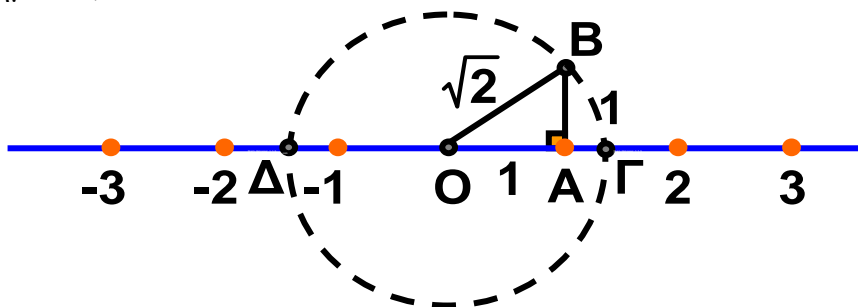
Λύση:

Θεωρούμε τον άξονα των πραγματικών αριθμών και στο σημείο 1 φέρνουμε κάθετο τμήμα ΑΒ στον άξονα μήκους 1. Το τρίγωνο ΟΑΒ που σχηματίζεται είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $OB^2 = OA^2 + AB^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ ή $OB = \sqrt{2}$.

Με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΒ κατασκευάζουμε κύκλο ο οποίος τέμνει τον άξονα στα σημεία Γ, Δ.



Στο σημείο Γ βρίσκεται ο άρρητος $\sqrt{2}$, ενώ στο Δ βρίσκεται ο άρρητος $-\sqrt{2}$

19. Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο να υπολογίσετε τα μήκη x, y και ω.

Λύση:

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε:

$$AG^2 = AD^2 + GD^2 \text{ ή }$$

$$2^2 = 1,2^2 + x^2 \text{ ή }$$

$$x^2 = 2^2 - 1,2^2 = 4 - 1,44 = 2,56.$$

$$\text{Άρα } x = \sqrt{2,56} = 1,6 \text{ (m).}$$

$$\text{Επίσης } BG = BD + DG \text{ ή }$$

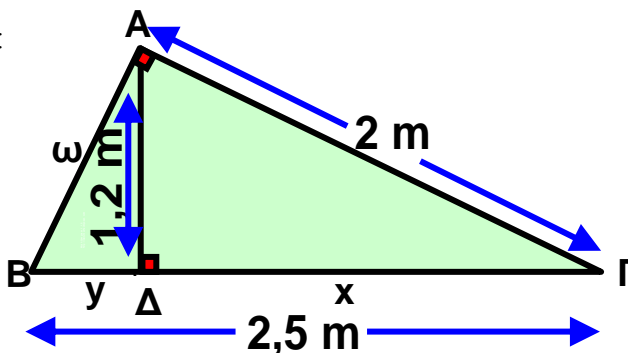
$$2,5 = y + 1,6$$

$$y = 2,5 - 1,6 = 0,9 \text{ (m).}$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο

$$AB\Delta \text{ έχουμε: } AB^2 = AD^2 + BD^2 \text{ ή }$$

$$\omega^2 = 1,2^2 + 0,9^2 = 1,44 + 0,81 = 2,25. \text{ Άρα } \omega = \sqrt{2,25} = 1,5 \text{ (m).}$$



20. Δίνεται η συνάρτηση $y = 2x + 3$. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-2	-1	0	1	2
y					

Λύση:

Για $x = -2$: $y = 2 \cdot (-2) + 3 = -4 + 3 = -1$.

Για $x = -1$: $y = 2 \cdot (-1) + 3 = -2 + 3 = 1$.

Για $x = 0$: $y = 2 \cdot 0 + 3 = 3$.

Για $x = 1$: $y = 2 \cdot 1 + 3 = 2 + 3 = 5$.

Για $x = 2$: $y = 2 \cdot 2 + 3 = 4 + 3 = 7$.

Άρα, ο πίνακας τιμών είναι:

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	1	3	5	7

21. Ένας ελαιοπαραγωγός έχει υπολογίσει ότι από κάθε κιλό ελιάς που πηγαίνει στο ελαιοτριβείο, παίρνει 0,2 κιλά λάδι.

α) Πόσα κιλά λάδι θα πάρει από παραγωγή 500 κιλών ελιών;

β) Να εκφράσετε την ποσότητα y σε κιλά του λαδιού, που θα πάρει, ως υνάρτηση της ποσότητας x των ελιών που παράγει.

γ) Πόσα κιλά ελιές πρέπει να παράγει, ώστε να πάρει 250 κιλά λάδι;

Λύση:

α) Αφού από 1 κιλό ελιές παίρνει 0,2 κιλά λάδι, από 500 κιλά ελιές θα πάρει $0,2 \cdot 500 = 100$ κιλά λάδι.

β) Από x κιλά ελιές θα πάρει $0,2x$ κιλά λάδι. Δηλαδή $y = 0,2x$.

γ) Από τη συνάρτηση $y = 0,2x$, για $y = 250$ κιλά λάδι έχουμε: $250 = 0,2x$

ή $x = \frac{250}{0,2} = 1250$. Άρα, θα πρέπει

να παράγει 1250 κιλά ελιές.

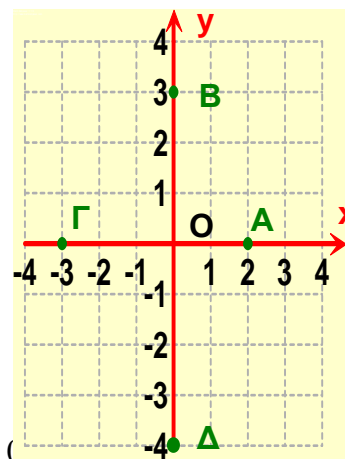
22. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ και Δ του παρακάτω σχήματος. Τι συμπεραίνετε;

Λύση:

Παρατηρούμε ότι από τα σημεία A και Γ οι κάθετες προς τον άξονα $y'y$ αντιστοιχούν στο σημείο O, οπότε αυτά τα σημεία έχουν τεταγμένες 0. Άρα είναι $A(2, 0)$, $\Gamma(-3, 0)$.

Ομοίως, από τα σημεία B και Δ οι κάθετες προς τον άξονα $x'x$ αντιστοιχούν στο σημείο O, οπότε τα σημεία αυτά έχουν τεταγμένη 0. Άρα είναι $B(0, 3)$ και $\Delta(0, -4)$.

Δηλαδή: Κάθε σημείο του άξονα $x'x$ έχει τεταγμένη 0 και κάθε σημείο του άξονα $y'y$ έχει τεταγμένη 0



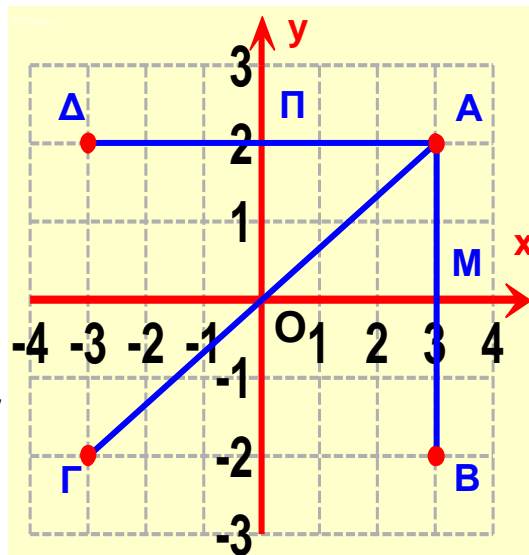
21. Δίνεται το σημείο A(3, 2). Να βρείτε το συμμετρικό του A ως προς:
 α) τον άξονα x'x β) τον άξονα y'y γ) την αρχή O των αξόνων.
 Ποιες είναι οι συντεταγμένες των σημείων αυτών;

Λύση:

Από το A φέρνουμε κάθετες AM και ΑΠ στους άξονες x'x και y'y. α) Προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα MB = MA. Το σημείο B είναι το συμμετρικό του A ως προς τον άξονα x'x και έχει συντεταγμένες (3, -2).

β) Προεκτείνουμε την ΑΠ κατά τμήμα ΠΔ = ΠΑ. Το σημείο Δ είναι το συμμετρικό του A ως προς τον άξονα y'y και έχει συντεταγμένες (-3, 2).

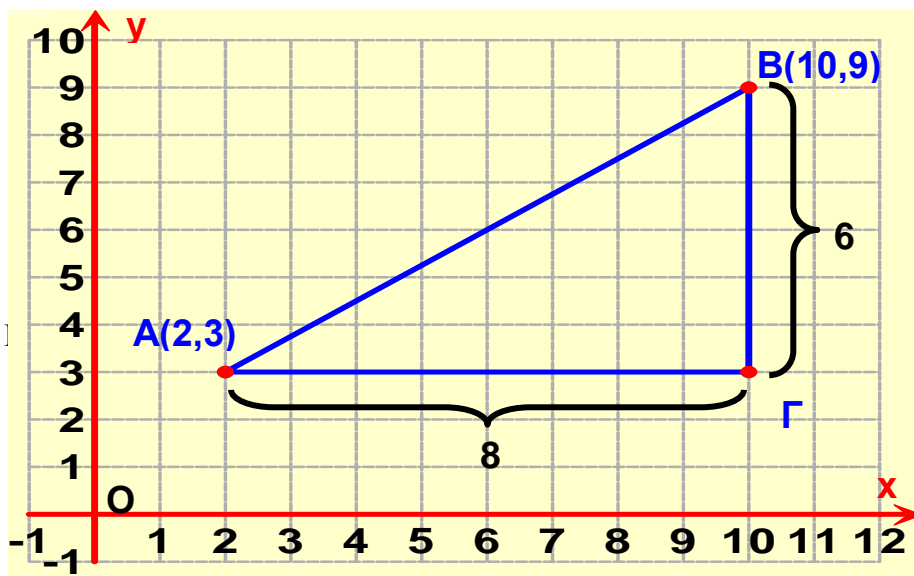
γ) Ενώνουμε το A με την αρχή O των αξόνων και προεκτείνουμε κατά τμήμα ΟΓ = ΟΑ. Το σημείο Γ είναι το συμμετρικό του A ως προς την αρχή O και έχει συντεταγμένες (-3, -2).



22. Δίνονται τα σημεία A(2, 3) και B(10, 9). Να υπολογίσετε την απόστασή τους AB. Τι συμπεραίνετε;

Λύση:

Σχηματίζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ του σχήματος. Τότε το σημείο Γ έχει Συντεταγμένες (10, 3), οπότε $ΑΓ = 10 - 2 = 8$ και Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι:
 $AB^2 = ΑΓ^2 + ΒΓ^2$
 ή $AB^2 = 8^2 + 6^2$
 ή $AB^2 = 100$ ή
 $AB = 10$
 Γενικότερα:



Αν δίνονται δύο σημεία A(x₁, y₁) και B(x₂, y₂), η απόστασή τους υπολογίζεται από τον τύπο:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} .$$

23. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$.

Λύση:

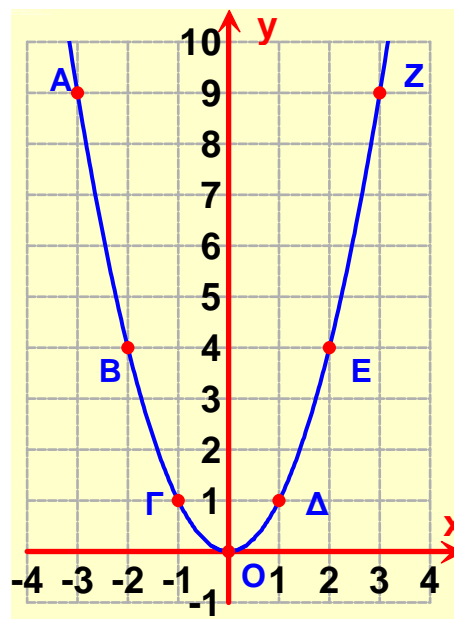
Σχηματίζουμε, καταρχάς, έναν πίνακα τιμών της συνάρτησης.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Στη συνέχεια, τοποθετούμε σ' ένα σύστημα αξόνων τα σημεία με συντεταγμένες (x, y) του παραπάνω πίνακα. Έτσι, βρίσκουμε τα σημεία A(-3, 9), B(-2, 4), Γ(-1, 1), O(0, 0), Δ(1, 1), E(2, 4) και Ζ(3, 9).

Στη συνέχεια, ενώνουμε με τη σειρά τα σημεία αυτά.

Η καμπύλη που προκύπτει είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$.



24. Σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε την ευθεία με εξίσωση $y = -0,6x$.

Λύση:

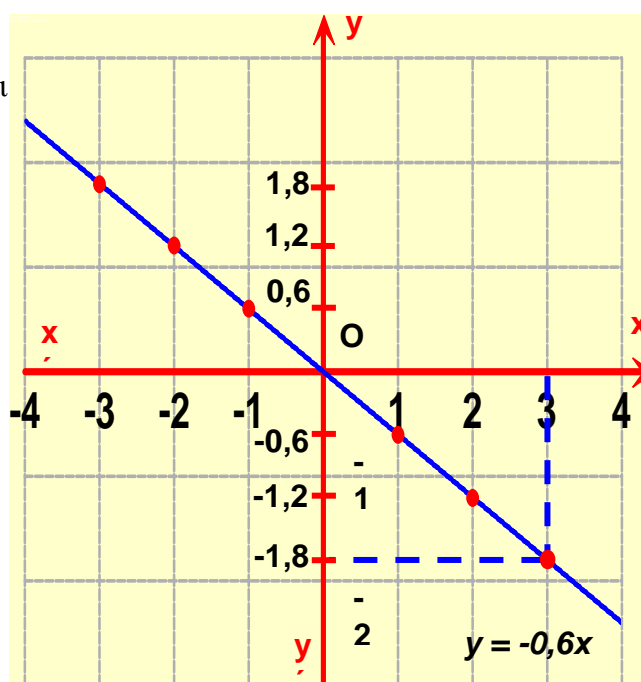
Η συνάρτηση $y = -0,6x$ έχει γραφική παράσταση μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή O των αξόνων.

Επομένως, πρέπει να βρούμε ένα ακόμα σημείο της.

Για $x = 3$ είναι $y = -0,6 \cdot 3 = -1,8$.

Άρα, η ευθεία περνάει από το σημείο A(3, -1,8).

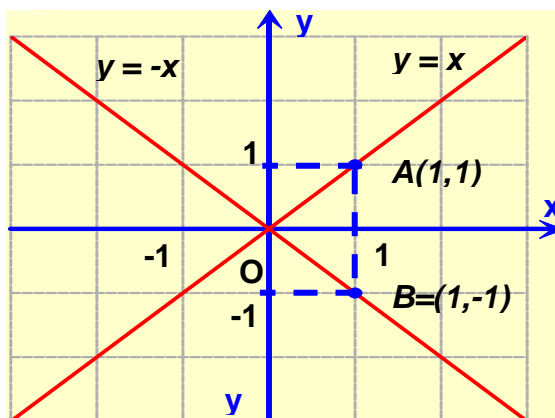
Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο σχήμα.



25. Να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις $y = x$ και $y = -x$.

Λύση:

Η συνάρτηση $y = x$ έχει γραφική παράσταση μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή O . Ένα δεύτερο σημείο της προσδιορίζεται δίνοντας μια τυχαία τιμή στο x εκτός της μηδενικής. Για $x = 1$ είναι $y = 1$, άρα η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$. Η ζητούμενη ευθεία είναι η OA . Ομοίως, βρίσκουμε ότι η γραφική παράσταση της $y = -x$ είναι η OB .



Παρατήρηση: Η ευθεία με εξίσωση $y = x$ είναι διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων και η $y = -x$ είναι διχοτόμος της 2ης και της 4ης γωνίας.

26. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο $A(-2, 1)$.

Λύση:

Το σημείο A έχει συντεταγμένες $x = -2, y = 1$, οπότε η κλίση της ευθείας είναι

$$\alpha = \frac{y}{x} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Επομένως, η εξίσωση της ευθείας

είναι η $y = -\frac{1}{2}x$.

27. Ένα πολυκατάστημα κάνει έκπτωση 20% σε όλα του τα είδη.

- α) Πόση έκπτωση αναλογεί σ' ένα ζευγάρι παπούτσια το οποίο κοστίζει αρχικά 100 €; Ποια είναι η τιμή που θα το αγοράσουμε μετά την έκπτωση;
 β) Να συμπληρώσετε το παρακάτω πίνακα, με τις τιμές διαφόρων ειδών του καταστήματος και να εξετάσετε αν είναι ανάλογα τα ποσά x, y και τα ποσά x, ω .
 γ) Να εκφράσετε τα ποσά y και ω ως συναρτήσεις του x .

Αρχική τιμή x	100	200	50	80	150
Έκπτωση y	20				
Τελική τιμή ω	80				

Λύση:

α) Η έκπτωση που αναλογεί είναι

$$100 \cdot \frac{20}{100} = 20 \text{ €}, \text{ οπότε θα το}$$

αγοράσουμε $100 - 20 = 80 \text{ €}$.

β) Ομοίως, με το ερώτημα (α) συμπληρώνουμε τον πίνακα:

Αρχική τιμή x	100	200	50	80	150
Έκπτωση y	20	40	10	16	30
Τελική τιμή ω	80	160	40	64	120

γ) Τα ποσά x και y είναι ανάλογα,

γιατί: $\frac{y}{x} = \frac{20}{100} = \frac{40}{200} = \frac{10}{50} = \frac{16}{80} = \frac{30}{150} = 0,2.$

Επομένως, $y = 0,2x.$

Τα ποσά x και ω είναι ανάλογα, γιατί:

$$\frac{\omega}{x} = \frac{80}{100} = \frac{160}{200} = \frac{40}{50} = \frac{64}{80} = \frac{120}{150} = 0,8.$$

Επομένως, $\omega = 0,8x.$

28. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = -2x$, $y = -2x + 3$ και $y = -2x - 3$, όπου x ο πραγματικός αριθμός.

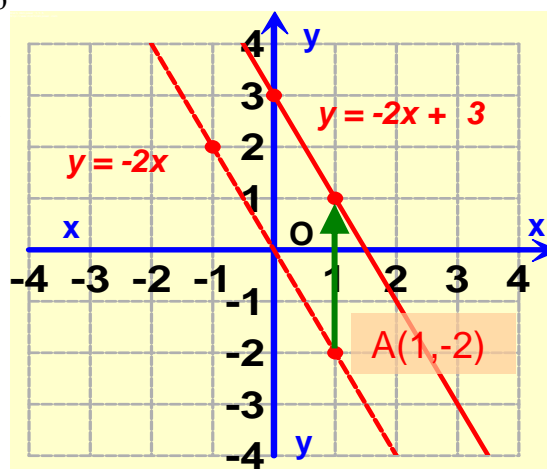
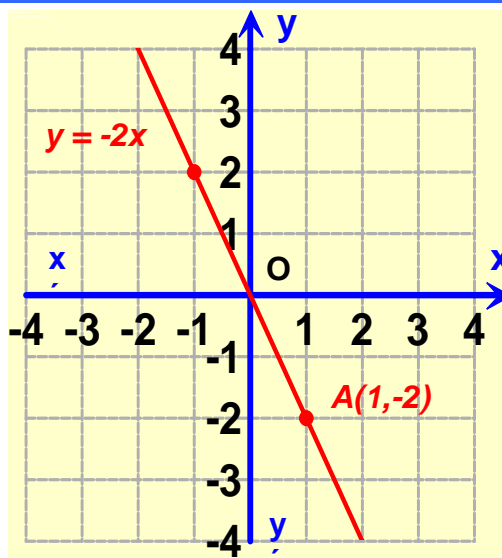
Λύση:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -2x$ είναι ευθεία, η οποία διέρχεται από την αρχή O των αξόνων. Για να τη σχεδιάσουμε, αρκεί να βρούμε ένα ακόμη σημείο της. Για $x = 1$ είναι $y = -2 \cdot 1 = -2.$

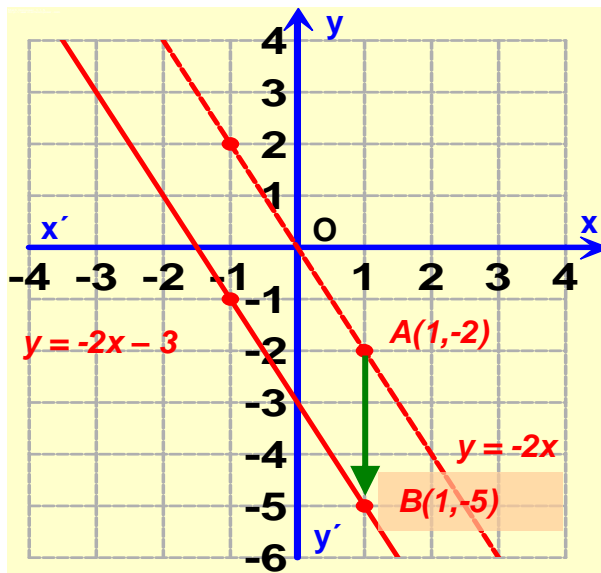
Άρα, διέρχεται και από το σημείο A με συντεταγμένες (1,-2). Ενώνουμε το O με το A και προεκτείνουμε. Η γραφική παράσταση της $y = -2x$ φαίνεται στο σχήμα.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -2x + 3$ είναι ευθεία παράλληλη με την $y = -2x$ και τέμνει τον άξονα y' y στο σημείο (0, 3). Μεταφέρουμε το σημείο (0, 0) στο σημείο (0, 3) και το σημείο (1, -2) στο (1, 1). Ενώνουμε τα νέα αυτά σημεία και προεκτείνουμε.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -2x + 3$ φαίνεται στο σχήμα.



Ομοίως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -2x - 3$ είναι ευθεία παράλληλη με την $y = -2x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -3)$. Μεταφέρουμε το σημείο $(0, 0)$ στο σημείο $(0, -3)$ και το σημείο $(1, -2)$ στο $(1, -5)$. Ενώνουμε τα σημεία αυτά και προεκτείνουμε, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



- 29. Δίνεται η εξίσωση $3x - 4y = 12$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί.**
- Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία αυτή τέμνει τους άξονες.
 - Να τη σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων.
 - Να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x και να βρείτε την κλίση της ευθείας.

Λύση:

α) Για τον άξονα $y'y$:

θέτουμε $x = 0$ στην εξίσωση της ευθείας, οπότε έχουμε:

$$3 \cdot 0 - 4y = 12 \quad \text{ή} \quad -4y = 12$$

$$\text{ή} \quad y = \frac{12}{-4} = -3$$

Άρα, τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο A με συντεταγμένες $(0, -3)$.

Για τον άξονα $x'x$:

θέτουμε $y = 0$ στην εξίσωση της ευθείας, οπότε έχουμε:

$$3 \cdot x - 4 \cdot 0 = 12 \quad \text{ή} \quad 3x = 12$$

$$\text{ή} \quad x = \frac{12}{3} = 4.$$

Άρα, τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο

B με συντεταγμένες $(4, 0)$.

β) Ενώνουμε τα παραπάνω

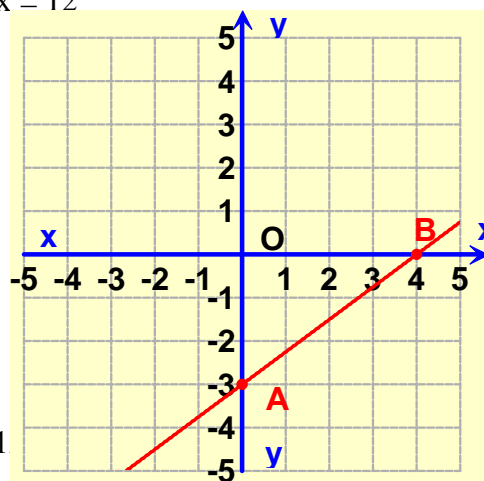
σημεία προεκτείνουμε.

Η γραφική παράσταση της ευθείας

$3x - 4y = 12$ φαίνεται στο σχήμα.

γ) Για να εκφράσουμε το y ως συνάρτηση

του x , λύνουμε ως προς y τη σχέση $3x - 4y = 12$





$$-4y = -3x + 12 \quad \text{ή} \quad y = \frac{3}{4}x - 3$$

$$\text{ή} \quad y = \frac{-3}{-4}x + \frac{12}{-4} \quad \text{Η κλίση της ευθείας αυτής είναι } \frac{3}{4}.$$

30.α) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις υπερβολές: $y = \frac{6}{x}$, $x \neq 0$ και $y = -\frac{6}{x}$, $x \neq 0$.
 β) Ποιες είναι οι συμμετρίες που ισχύουν μεταξύ των κλάδων των παραπάνω υπερβολών;

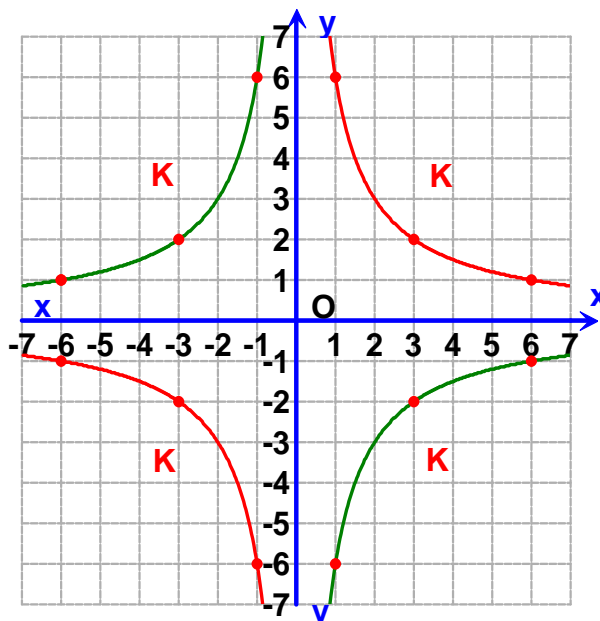
Λύση:

α) Σχηματίζουμε τους πίνακες τιμών:

x	-6	-3	-1	1	3	6
y	-1	-2	-6	6	2	1

x	-6	-3	-1	1	3	6
y	1	2	6	-6	-2	-1

Κατόπιν σχεδιάζουμε τις δύο υπερβολές.



β) Αν ονομάσουμε τους τέσσερις κλάδους K_1 , K_2 , K_3 , K_4 όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, τότε έχουμε ότι:

- Ο K_1 είναι συμμετρικός με τον K_3 ως προς τον άξονα $y'y$.
- Ο K_1 είναι συμμετρικός με τον K_4 ως προς τον άξονα $x'x$.
- Ο K_1 είναι συμμετρικός με τον K_2 ως προς την αρχή των αξόνων. Παρόμοιες συμμετρίες ισχύουν και για τους άλλους κλάδους.